① а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

<u>Решение:</u> Используем метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} I(-3)+II \\ I(-2)+III \\ I(-1)+IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[II(-1)+IV]{II\cdot 4+III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} III\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ IV\cdot\frac{1}{6} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{III(-9)+IV}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 17/2 & 17/2 \end{array}\right) \xrightarrow{IV\cdot\frac{2}{17}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} rang\, A = 4 \\ n = 4 \end{array} \Rightarrow$$

система является определённой и имеет 1 решение.

$$\begin{array}{l} IV\left(-\frac{1}{2}\right)+III \\ IV\cdot 7+II \\ IV\cdot(-3)+I \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III(-2)+I]{III\cdot 5+II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II(-1)+I}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

где I, II, III - номера строк.

Сделаем проверку: $\begin{cases} -1 - 1 + 0 + 3 = 1 \\ -3 + 1 - 0 - 2 = -4 \\ -2 - 3 - 0 - 1 = -6 \\ -1 - 2 + 0 - 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -4 = -4 \\ -6 = -6 \\ -4 = -4 \end{cases}$

Ответ: $x_1=-1;\ x_2=-1;\ x_3=0;\ x_4=1.$

б) $$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$$

Решение: Используем метод Гаусса:

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}(-1)+\mathrm{IV}]{\mathrm{I}(-2)+\mathrm{II} \quad \mathrm{I}(-1)+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}(-1)+\mathrm{I}]{\mathrm{IV}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}\cdot\frac{1}{4}]{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}(-1)+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 3 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 4 \end{array}$$

$\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \tilde{A}$ значит система несовместна (не имеет решений) ($\tilde{A}$ - расширенная матрица)

Ответ: система несовместна - не имеет решений.

в) $$\begin{cases} 3y+2z+5t=-5 \\ 4x+y+2z+3t=1 \\ -2x+y+t=-3 \\ -8x+y-2z-t=-7 \\ -4x+5y+2z+7t=-11 \end{cases}$$

Решение: Используем метод Гаусса:

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 2 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -8 & 1 & -2 & -1 & -7 \\ -4 & 5 & 2 & 7 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{V}]{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{2}+\mathrm{III} \quad \mathrm{II}\cdot 2+\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 2 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 4 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}(-1)+\mathrm{I}]{\mathrm{III}\cdot\frac{2}{3} \quad \mathrm{IV}(-2)+\mathrm{V}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 5/3 & -5/3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} \text{III}(-1)+\text{II} \\ \text{III}(-3)+\text{IV} \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4/3 & 4/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 5/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\cdot\frac{1}{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 5/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2 < n = 4$$

Значит система является неопределённой (имеет бесконечное количество решений)

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \\ z, t \in R \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \\ z, t \in R \end{cases}$

2) а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Вычислим ранг матрицы с помощью элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}(-1)+\text{III}]{\text{I}(-1)+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & k-3 & 2-k \\ 0 & 0 & 2-k \end{pmatrix}$$

При $k = 2$ $\operatorname{rang} A = 2$

При $k \neq 2$ $\operatorname{rang} A = 3$

Ответ: При $k = 2 \to \operatorname{rang} A = 2$; При $k \neq 2$ $\operatorname{rang} A = 3$

б) $$\begin{pmatrix} 2 & -2k & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \\ k & -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \\ k & -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{I}+\text{II} \\ \text{I}+\text{III} \\ \text{I}(-k)+\text{IV}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1/2 \\ 0 & 1-k & -1 & 3/2 \\ 0 & -k & -3 & 9/2 \\ 0 & k^2-4 & 4-k & \frac{k-6}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II}\left(\frac{k}{1-k}\right)+\text{III} \\ \text{II}\left(\frac{4-k^2}{1-k}\right)+\text{IV}}} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1/2 \\ 0 & 1-k & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & \frac{2k-3}{1-k} & \frac{9-6k}{2(1-k)} \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-5k}{1-k} & \frac{-4k^2+7k+6}{2(1-k)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}\left(\frac{1-k}{2k-3}\left(-\frac{2k^2-5k}{1-k}\right)\right)+\text{IV}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & -1/2 \\ 0 & 1-k & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & \frac{2k-3}{1-k} & \frac{9-6k}{2(1-k)} \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$$

1) При $k = 3 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$

2) $\begin{cases} \frac{2k-3}{1-k} = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \\ \frac{9-6k}{2(1-k)} = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\operatorname{rang} A = 3$

3) В остальных случаях $\operatorname{rang} A = 4$.

Ответ: 1) $k = 3$ и $k = \frac{3}{2} \to \operatorname{rang} A = 3$

2) $k \neq 3;\ k \neq \frac{3}{2} \Rightarrow rang\,A = 4.$

③ $$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 2t = 6 \\ \alpha x - 3y + 4z - \alpha t = 6 \\ 2x - \beta y + 4z - 2t = 2\beta \\ \alpha x - 3y + 4z - 2t = 2\beta \end{cases}$$

Решение: Используем метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -2 & 6 \\ \alpha & -3 & 4 & -\alpha & 6 \\ 2 & -\beta & 4 & -2 & 2\beta \\ \alpha & -3 & 4 & -2 & 2\beta \end{array}\right) \begin{array}{l} I\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + II \\ I(-1) + III \\ I\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & \frac{3\alpha-6}{2} & 4-2\alpha & 0 & 6-3\alpha \\ 0 & 3-\beta & 0 & 0 & 2\beta-6 \\ 0 & \frac{3\alpha-6}{2} & 4-2\alpha & \alpha-2 & 2\beta-3\alpha \end{array}\right) \xrightarrow[III \cdot \frac{1}{3-\beta}]{II(-1)+IV}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & \frac{3\alpha-6}{2} & 4-2\alpha & 0 & 6-3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2\beta-6}{3-\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 2\beta-6 \end{array}\right) \xrightarrow{IV \cdot \frac{1}{\alpha-2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & \frac{3\alpha-6}{2} & 4-2\alpha & 0 & 6-3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \end{array}\right) \xrightarrow[III \cdot 3 + I]{III\left(\frac{6-3\alpha}{2}\right) + II}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \end{array}\right) \xrightarrow[IV \cdot 2 + I]{II\left(\frac{1}{4-2\alpha}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 & \frac{4(\beta-3)}{\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \end{array}\right) \xrightarrow{II(-4)+I}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(\beta-3)}{\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \end{array}\right) \xrightarrow{I\left(\cdot\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \\ z = 0 \\ y = -2 \\ t = \frac{2(\beta-3)}{\alpha-2} \end{cases}$$

При $\alpha = 2$; $\beta = 3$ система имеет бесконечно много решений.

$\alpha = 2$; $\beta \neq 3$; $\beta \in R$ – система не имеет решений

$\alpha \neq 2; \alpha \in R$; $\beta \in R$; $\beta \neq 3$ система имеет единственное решение

$\alpha \neq 2; \alpha \in R$, $\beta = 3$ система имеет бесконечно много решений

④ Решение: Условие сбалансированной торговли:

$r_i \geq x_i$ (r_i - выручка, x_i - бюджет стран)

В матричной форме: $Ax = x$ или $(A-E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0,2-1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3-1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5-1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Используем метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \cdot 10 \\ II \cdot 10 \\ III \cdot 10 \\ IV \cdot 10 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} IV \cdot (-3) + III \\ IV\ (-4) + II \\ IV \cdot 8 + I \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 & 18 & -46 \\ 0 & -11 & -7 & 26 \\ 0 & 0 & -11 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} I + II \\ I \cdot (-\frac{1}{11}) + IV \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 11 & 18 & -46 \\ 0 & 0 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & -11 & 20 \\ 1 & 0 & 4/11 & -20/11 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \cdot \frac{1}{11} \\ II + III \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 18/11 & -46/11 \\ 0 & 0 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4/11 & -20/11 \end{pmatrix} \begin{matrix} III \cdot \frac{1}{11} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18/11 & -46/11 \\ 0 & 0 & 1 & -20/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4/11 & -20/11 \end{pmatrix} \begin{matrix} II\ (-\frac{18}{11}) + I \\ II\ (-\frac{4}{11}) + IV \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -146/121 \\ 0 & 0 & 1 & -20/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -140/121 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{бюджеты стран} \begin{cases} x_1 = \frac{140}{121} x_4 \\ x_2 = \frac{146}{121} x_4 \\ x_3 = \frac{20}{11} x_4 \\ x_4 \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 140 \\ x_2 = 146 \\ x_3 = 220 \\ x_4 = 121 \end{cases}$$

Тогда условие сбалансированной торговли:

$$\begin{cases} x_1 = 140C \\ x_2 = 146C \\ x_3 = 220C \\ x_4 = 121C \end{cases}$$

где C - множитель связанный с денежной единицей

$\longrightarrow$ ответ.